平成 25 年度新潟大学前期日程入学試験学力検査問題

$\boxed{4}$ 平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり、また平行でないとする。次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して、不等式

$$0 < |\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 \leqq (1+t)^2$$

が成立することを示せ。

(2) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して $\overrightarrow{p} = \dfrac{2t^2\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2}$ とおき、$f(t) \geqq \dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。

(3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。

— 解答例 —

(1) まず $|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}| \geqq 0$ が成り立つ。ここで、$|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}| = 0$ とすると、$\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ゆえ、$\overrightarrow{a} = -t\overrightarrow{b}$ となり、$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が平行でないことに反するので、$0 < |\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|$ である。

次に

$$|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + t^2|\overrightarrow{b}|^2 = 1 + 2t\cos\theta + t^2$$

ここで、$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ のなす角を θ とした。

$t > 0$, $\cos\theta \leqq 1$ なので、

$$1 + 2t\cos\theta + t^2 \leqq 1 + 2t + t^2 = (1+t)^2$$

となり、$|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 \leqq (1+t)^2$ が成り立つ。

(2) (1) より、

$$f(t) = |\overrightarrow{p}| = \frac{2t^2|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2} \geqq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

(3) $t \geqq 0$ のとき、

$$f(t) = 1 \iff 2t^2 = |\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 \iff 2t^2 = 1 + 2t\cos\theta + t^2$$

ただし、θ は $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のなす角である。

$f(0) = 0$ に注意すれば、$f(t) = 1$ となる正の数が存在するのは、

t の 2 次方程式 $t^2 - 2t\cos\theta - 1 = 0$ が正の実数解を持つことと同値である。

$y = t^2 - 2t\cos\theta - 1$ のグラフは、下に凸の 2 次関数のグラフで、y 切片が負なので正の解を一つ持つ。

【感想】

(3) の解答で、(2) を使うものが思いつきません。(2) も (3) も易しいので、これはどういう意図なんでしょうね。