

平成 16 年度新潟大学入試問題 (数学) 理, 医, 歯, 工学部

1 座標平面上に、原点 $O(0,0)$, 点 $A(1,0)$, 点 $B(0,1)$ をとる。さらに、2 点 $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$, $P_2(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ をとる。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。 S_1 を $\theta > 0$ のとき $\triangle AP_1O$ の面積、 $\theta = 0$ のとき 0 とする。また、 S_2 を、 $\theta < \frac{\pi}{4}$ のとき $\triangle BP_2O$ の面積、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 0 とする。 $S = S_1 + \frac{1}{2}S_2$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) S を $\sin \theta$ で表せ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

2 曲線 $x = 10e^{-x}$ の $0 \leq y \leq 4$ の部分と x 軸の $0 \leq x \leq 10$ の部分を、 y 軸のまわりに 1 回転してできる容器を考える。 x 軸の $0 \leq x \leq 10$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる面が容器の底である。この容器の中に、容器の底を水平にして、毎秒 2 の割合で水を注ぐ。注ぎ始めてから t 秒後の水面の高さを $h(t)$ とする。 $h(0) = 0$ である。はじめて $h(t) = 4$ となる t を T (秒) とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) T を求めよ。
- (2) $0 \leq t \leq T$ における $h(t)$ を求めよ。
- (3) $0 < t < T$ における水面の上昇速度 $h'(t)$ を求めよ。

3 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とする。辺 AB 上に、 A, B と異なる点 P をとり、線分 AM と線分 CP の交点を Q とする。 $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $k = |\vec{AP}|$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{AQ} , \vec{PQ} を \vec{a} , \vec{b} , k で表せ。
- (2) $|\vec{AQ}|$, $|\vec{PQ}|$ を k で表せ。
- (3) $\triangle APQ$ が二等辺三角形となるとき、 k を求めよ。

4 α, β は異なる複素数とし、複素数平面上で α, β を表す点をそれぞれ A, B とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 複素数 z が $|z| = |z - 1|$ を満たすとき、 $z + \bar{z} = 1$ であることを示せ。
- (2) 複素数 z が $|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たすとき $\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = \left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} - 1 \right|$ であることを示せ。
- (3) 線分 AB の垂直二等分線と A を中心とする半径 $2|\beta - \alpha|$ の円との共有点が表す複素数を α, β で表せ。

5 $x > 0$ において定義された関数 $y = f(x) = x(1 + \log x)$ のグラフを C とする。また、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y = g(x)$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $g(x)$ を求めよ。
- (2) $x > 0$ において、 $f(x) \geq g(x)$ であることを示せ。
- (3) 2 直線 $x = 1, x = 2$ と曲線 C および接線 l で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (4) t が $t > 0$ の範囲を動くとき、面積 $S(t)$ が最小となる t を求めよ。

6 a, b を整数とし、行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ と定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $A + B$ は逆行列 $(A + B)^{-1}$ を持つことを示せ。
- (2) $(A + B)^{-1}$ のすべての成分が整数となるとき、 $A - B$ は逆行列 $(A - B)^{-1}$ を持つことを示せ。
- (3) $(A + B)^{-1}$ と $(A - B)^{-1}$ のすべての成分が整数となるような a と b の組 (a, b) をすべて求めよ。