平成 16 年度新潟大学入試問題 (数学) 理，医，歯，工学部

$\boxed{4}$ α, β は異なる複素数とし、複素数平面上で α, β を表す点をそれぞれ A, B とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 複素数 z が $|z| = |z-1|$ を満たすとき、$z + \overline{z} = 1$ であることを示せ。

(2) 複素数 z が $|z-\alpha| = |z-\beta|$ を満たすとき $\left|\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \left|\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha} - 1\right|$ であることを示せ。

(3) 線分 AB の垂直二等分線と A を中心とする半径 $2|\beta-\alpha|$ の円との共有点が表す複素数を α, β で表せ。

—解答例—

(1) $|z|^2 = |z-1|^2$ ゆえ $z\overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - z - \overline{z} + 1$ である。整理して、$z + \overline{z} = 1$

(2) $\left|\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \left|\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha} - 1\right| \iff \left|\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \left|\dfrac{z-\alpha-(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\right| \iff |z-\alpha| = |z-\beta|$

(3) 共有点を z とすると、$|z-\alpha| = |z-\beta|$, $|z-\alpha| = 2|\beta-\alpha|$ を満たす。

第 1 式と (1),(2) から $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha} + \dfrac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = 1$ である。

第 2 式から $\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha} \times \dfrac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = 4$ である。

よって、$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\ \left(, \dfrac{\overline{z}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}\right)$ は $t^2 - t + 4 = 0$ の解である。解は $t = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm \sqrt{3}i$ ゆえ、

$z = \alpha + (1 \pm \sqrt{3}i)(\beta-\alpha) = \mp\sqrt{3}i\alpha + (1 \pm \sqrt{3}i)\beta$ (複号同順)