2001年度入試で聞き込んだ，おもしろい解答

1　京都大学　理系　問題４　と　文系　問題２

1.1　理系　問題４

xyz 空間内の正八面体の頂点 $P_1, P_2, \cdots, P_6$ とベクトル $\overrightarrow{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，

$$\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。

1.2　文系　問題２

xy 平面内の相異なる４点 P_1, P_2, P_3, P_4 とベクトル $\overrightarrow{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，

$$\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。

1.3　アイディア

本質的に同じ問題であるから，理系の設定で考える。

$\overrightarrow{P_kP_m}$ 全体を考えると，30 個の内積についての問題であるが，$\overrightarrow{P_kP_m} = \overrightarrow{OP_m} - \overrightarrow{OP_k}$ と分解すると，

$$\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} < 0 \iff \overrightarrow{OP_m} \cdot \overrightarrow{v} < \overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{v}$$

これがすべての $m \neq k$ に対して成り立つような k が存在するというのは単に k として $\{\overrightarrow{OP_m} \cdot \overrightarrow{v}\}$ の最大値を与える m を k とすればよい。

1.4　解答

仮定から $\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{OP_m} - \overrightarrow{OP_k}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP_m} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{v} \neq 0$ ゆえ，$\{\overrightarrow{OP_m} \cdot \overrightarrow{v}\}(m=1,2,\cdots,6)$ はすべて異なる。そこで，$\overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{v}$ が最大であるとすると，$\overrightarrow{P_kP_m} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP_m} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{OP_k} \cdot \overrightarrow{v} < 0$ が，すべての $m(\neq k)$ に対して成り立つ。

2　京都大学　文系　問題４

n を２以上の整数とする。実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対し，

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とおく。$k = 1, 2, \cdots, n$ について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

2.1　アイディア

「端だけ考えればよい」とのことだったが，解答１は思いつかなかった。このとき，実は $|a_n| < 2-\dfrac{1}{n-1}$ が成り立つのだよ，と聞いた。こちらは証明できたぞ（解答２）。$n = 1, 2, 3$ の場合をやってみたら，$n = 2$ でそうかなと思い，$n = 3$ のとき確信したね。具体的に調べてみればよくわかることもあるということかな。全部足すというアイディアはよくあるが，一部を足すというアイディアは，具体的にやらないとわかりにくいねえ。

2.2　解答１

仮定から，

$$1 > S - a_1 \geqq S - a_2 \geqq \cdots \geqq S - a_n > -1$$

$\therefore a_n - a_1 < 2$

$a_n \geqq 2$ とすると $a_1 \geqq 0$ ゆえ，$S - a_1 = a_2 + \cdots + a_n \geqq a_n \geqq 2$ となり矛盾である。

$a_1 \leqq -2$ とすると $a_n \leqq 0$ ゆえ，$S - a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} \leqq a_1 \leqq -2$ となり矛盾である。

$\therefore -2 < a_1 < \cdots < a_n < 2$ が成り立つ。

2.3　解答２

$-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a_1 < 1$, $-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a_2 < 1, \cdots, -1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a_{n-1} < 1$ の辺々を加えると，$-(n-1) < (n-2)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + (n-1)a_n < n-1$ を得る。ここで，$-1 < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} < 1$ だから，$-(2n-3) < (n-1)a_n < 2n-3$.

これから，$|a_n| < 2 - \dfrac{1}{n-1}$

3　東京大学　理科　問題６

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある２点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，B のみ正の方向に 1 動かす。

最初の２点 A,B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち $a = b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。
(2) X_n を求めよ。
(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

3.1　アイディア

3.2　解答

4　東京大学　文科　問題４

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

その碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数と見なす。

4.1　アイディア

碁石の数が与えられているが，黒石が多いからこのようなことが起こるのだろうと考えると，数に制限をつけない方が話がよく見える。自然数で成り立つのなら，帰納法も使えるだろう。

4.2　解答

「黒石の数＞白石の数」が成り立てば成立することを碁石の総数 n についての帰納法で示す。

[1] n = 1 のとき明らかに成り立つ。

[2] n = k (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。

n = k + 1 の場合を考えると，(n 個の碁石) ○　の場合と (n 個の碁石) ● の場合しかない。前者は，帰納法の仮定より成り立つ。

後者のときは，さらに次の２つの場合に分ける。

(白黒同数の碁石) ● の場合と (「黒石の数＞白石の数」の碁石) ● の場合である。

前者は，右端の黒石を指定すれば成り立つ。後者は，帰納法の仮定より成り立つ。

以上から n = k + 1 のときも成り立つ。

[3] [1],[2] から，すべての自然数 n に対して成り立つから，当然 n = 361 のときも成り立つ。